УДК 373.5.016:512

В.М.Кліндухова

Київська державна академія водного транспорту
імені гетьмана Петра Конашевича-Сагайдачного

НАБЛИЖЕНІ ОБЧИСЛЕННЯ В КЛАСАХ ПРИРОДНИЧО-МАТЕМАТИЧНОГО НАПРЯМУ НАВЧАННЯ

Анотація. Кліндухова В. М. Наближені обчислення в класах природничо-математичного напряму навчання.
Понад півсторіччя наближені обчислення є офіційно визнаною складовою шкільної математичної освіти. Їх викладення часто супроводжується певними протиріччями та проблемними моментами. Висвітленню деяких з них і присвячена дана стаття

Постановка проблеми. Курс математики природничого напряму призначений для тих, хто готується отримати вищу освіту зі спеціальностей, які потребують достатньо ґрунтовної математичної підготовки. Особлива увага при цьому має бути приділена з'ясуванню ролі математики у сферах її використання. Тобто учні мають опановувати простими навичками математичного моделювання. Саме такий вид діяльності має бути головним у навчанні учнів класів природничого напряму [5, с.72]. Відомо, що математичне моделювання безпосереднім чином пов'язане *із наближеними обчисленнями*, тому вивчення останніх у відповідних курсах математики набуває приоритетного значення.

Аналіз актуальних досліджень. Проблемами навчання наближених обчислень у шкільному курсі математики займались В.Брадіс, М.Кравчук, О.Долгушин, І.Кавун, І.Лобанов, В.Грибанов, В.Прочухаєв, Р.Хабіб, А.Суткова, Н.Єлизавєтіна, Н.Прайсман та інші (30-60 рр. ХХ ст.), М.Жалдак, Ю.Рамський, С.Аллабергенов, Р.Мусаелян, В.Фірсов, І.Адішев, М.Мадбабаєв (70-80 рр. ХХ ст.). На сьогодні методична система навчання наближених обчислень, яка б відповідала сучасним освітнім пріоритетам, лише набуває свого становлення. Її вибудовування відбувається шляхом акумуляції та творчої трансформації методичних надбань минулого.

Доводити черговий раз актуальність вирішення проблеми навчання наближених обчислень не має потреби. Краще ніж писала про це З.І.Слєпкань [7] навряд вдасться. Певні кроки на шляху по її розв’язанню в основній школі, вже робляться, зокрема і нами.

Мета статті. Викласти деякі думки щодо розвитку змістової лінії наближених обчислень у старшій школі, які можуть у майбутньому стати у нагоді під час створення методичної системи навчання наближених обчислень в 10-12 класах різних профілів та напрямів підготовки.

Виклад основного матеріалу. Профільне навчання в старшій школі відбувається на базі математичної підготовки учнів, яку вони отримали в основній школі. Створена нами та експериментально перевірена методична система навчання наближених обчислень в основній школі висвітлена у дисертаційному дослідженні, а також на сторінках фахових видань (журнал «Математика в школі №2,3,6,9 за 2008 рік). Вона виявила ефективність щодо поліпшення якості освіти, а також отримала позитивні відгуки та підтримку вчителів-практиків і провідних фахівців у сфері методики навчання математики. Нагадаємо, якими основними знаннями, уміннями та навичками з наближених обчислень мають володіти учні по закінченню 9 класу, так як базуючись саме на них у подальшому тексті статті будуть викладені орієнтовні вектори розгортання змістової лінії наближених обчислень у 10-12 класах природничого напряму:

учні мають володіти ***уявленнями:***

- про основні джерела наближених значень (деякі результати підрахунків; результати округлень; результати практичних вимірювань, тобто вимірювань, які виконані за допомогою вимірювальних засобів);
- про кількісні та якісні числові характеристики наближених значень (межа абсолютної похибки або точність; межа відносної похибки або відносна точність);
- про окремі випадки якісних та кількісних числових характеристик (абсолютна похибка та відносна похибка);

*учні повинні **вміти**:*

- розпізнавати та наводити приклади наближених значень;
- записувати та аналізувати наближені значення у вигляді подвійних нерівностей, умовних рівностей, відповідних мовних оборотів;
- обчислювати числові характеристики наближених значень;
- виконувати дії з наближеними значеннями за методом меж;
- застосовувати основні поняття та правила наближених обчислень під час розв'язування прикладних задач;

*учні повинні **знати:***

- правила округлення меж наближених значень;
- формули для знаходження числових характеристик наближених значень;
- правила виконання дії над наближеними значеннями за методом меж.

Як бачимо учні основної школи знайомляться лише з одним із методів наближених обчислень, а саме із методом меж. Вибір саме методу меж у якості провідного методу наближених обчислень в основній школі обумовлено його методичними та логіко-математичними внутрішньо предметними зв'язками із традиційним програмовим матеріалом, зокрема теорією нерівностей. Завдяки своїй ідейній простоті та наочності метод меж є доступним, легко сприймається учнями основної школи. *У старшій школі* ситуація змінюється. По-перше, *ускладнюється рівень задач*, що пропонуються учням, як з математики, так і з інших предметів природничого циклу, зокрема фізики. По-друге, якісно збагачується математичним апарат, яким опановують учні. Зокрема йдеться про елементи диференціального числення, теорії ймовірностей, тощо. Це дає можливість ознайомити учнів із більш точними та наукового обґрунтованими методами наближених обчислень, тим самим активуючи внутрішньо-предметні зв'язки та готуючи учнів до навчання у вищій школі .

Проілюструємо про які саме методи йдеться на прикладі конкретної задачі.

Задача. Обчислити об'єм матеріалу для виготовлення циліндричного стакану (рис.1), де радіус внутрішнього циліндру R, висота внутрішнього циліндру H, товщина стінок та дна стакану k. Під час практичних вимірювань було з'ясовано з точністю до 0,05 см, що H=20см, також відомо (за відповідною проектною документацією), що

$R = \frac{H}{5}, k = \frac{H}{200}$.

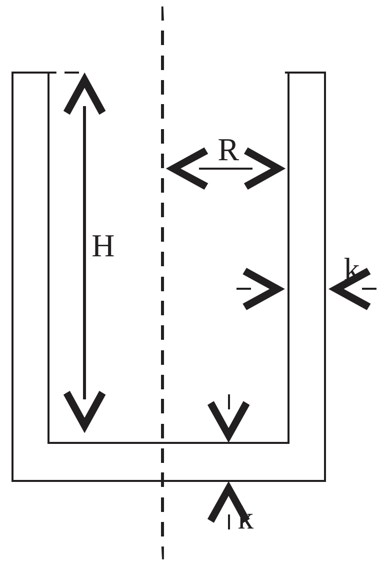

Рис. 1. *Схема-креслення до задачі*

Коментарі до розв'язання задачі: Будуємо математичну модель, поки що нехтуючи наближеним характером вхідних даних. Розв'язуємо відповідну стереометричну задачу і отримуємо, що

$$V = \pi(2RHk + R^2k + Hk^2 + 2Rk^2 + k^3),$$

$$V = \pi(2 \cdot \frac{H}{5} \cdot H \frac{H}{200} + \left(\frac{H}{5}\right)^2 \cdot \frac{H}{200} + H \cdot \left(\frac{H}{200}\right)^2 + 2 \cdot \frac{H}{5} \cdot \left(\frac{H}{200}\right)^2 + \left(\frac{H}{200}\right)^3),$$

$$V = \frac{17881}{8000000} H^3 \pi.$$

Подальше розв'язування задачі з урахуванням наближеного характеру вхідних даних виконаємо різними способами.

1. *Розв'язування задачі методом меж.*

<u>*Короткі теоретичні відомості:*</u> відповідний теоретичний матеріал міститься у шкільних підручниках з алгебри для 9 класу загальноосвітніх шкіл (зокрема [1, с.18], [2, с.14]) та для 8 класу шкіл з поглибленим вивченням математики (зокрема [3, с.278]).

<u>*Розв'язок задачі:*</u> За умовою задачі $H = 20см$ з точністю до 0,05см. Таким чином можемо записати, що $H = (20 \pm 0{,}05)см$ або $19{,}95см \le H \le 20{,}05см$. Тоді керуючись правилами піднесення наближених значень до степеня з натуральним показником, а також правилами множення наближеного значення на число отримуємо:

$$\left(\frac{17881\pi}{8000000}\cdot 19{,}95^3\right)см^3 \le \frac{17881}{8000000}H^3\pi \le \left(\frac{17881\pi}{8000000}\cdot 20{,}05^3\right)см^3$$

$$55{,}7545595...см^3 \le V \le 56{,}5971835...см^3$$

$$55{,}7см^3 \le V \le 56{,}6см^3$$

$$V = (56{,}15 \pm 0{,}45)см^3$$

$$V = 56{,}15см^3 \pm 0{,}8\%$$

Відповідь: $V = (56{,}15 \pm 0{,}45)см^3$.

2. Розв'язування задачі методом меж похибок.

Короткі теоретичні відомості: відповідний теоретичний матеріал не міститься у шкільних підручниках. Його можна знайти у спеціальній літературі, а також посібниках для вчителів, зокрема [6, с.79], [4, с.19]. Нагадаємо, що межу абсолютної похибки наближеного значення у більшості джерел позначають: *h*, а межу відносної похибки наближеного значення – *ε*.

Причому, якщо $x = a \pm h$, то $\varepsilon = \frac{h}{a}\cdot 100\%$. Наведемо деякі теореми:

Теорема 1: Межа абсолютної похибки суми (різниці) наближених значень дорівнює сумі меж абсолютних похибок доданків (зменшуваного і від'ємника): $x = a \pm h_a; y = b \pm h_b;\ h_{(a+b)} = h_a + h_b;\ h_{(a-b)} = h_a + h_b$

Теорема 2: Межа відносної похибки добутку (частки) наближених значень дорівнює сумі меж відносних похибок множників (діленого і дільника):

$$x = a \pm \varepsilon_a; y = b \pm \varepsilon_b;\ \varepsilon_{(ab)} = \varepsilon_a + \varepsilon_b;\ \varepsilon_{(\frac{a}{b})} = \varepsilon_a + \varepsilon_b$$

Розв'язок задачі: За умовою задачі $H = (20 \pm 0{,}05)см$. Знаючи межу абсолютної похибки $h_H=0{,}05$ обчислимо межу відносної похибки ε_H:

$$\varepsilon_H = \frac{h_H}{a_H}\cdot 100\% = \frac{0{,}05}{20}\cdot 100\% = 0{,}25\%,\ тоді\ H = 20см \pm 0{,}25\%.$$

За теоремою 2, а також пам'ятаючи, що абсолютна та відносна похибка точних значень дорівнює нулеві, отримаємо:

$$\varepsilon_V = \varepsilon_{\frac{17881\pi}{8000000}\cdot H^3} = \varepsilon_{17881} + \varepsilon_\pi + \varepsilon_{8000000} + \varepsilon_H + \varepsilon_H + \varepsilon_H = 0 + 0 + 0 + 0{,}25\% + 0{,}25\% + 0{,}25\% = 0{,}75\%$$

, тоді $V = \frac{17881\pi}{8000000} \cdot 20^3 см^3 \pm 0{,}75\% = 56{,}1748182...см^3 \pm 0{,}75\%$.

Знаючи межу відносної похибки результату ε_V*=0,75%* обчислимо межу абсолютної похибки h_V:

$$h_V = \frac{\varepsilon_V \cdot a_V}{100\%} = \frac{0{,}75\% \cdot 56{,}1748182...}{100\%} = 0{,}42131114...см^3,\ тоді$$

$$V = (56{,}1748182... \pm 0{,}42131114...)см^3, \qquad V = (56{,}17 \pm 0{,}43)см^3$$

<u>*Відповідь:*</u> $V = (56{,}17 \pm 0{,}43)см^3$.

3. Розв'язування задачі із використанням відомостей із теорії ймовірностей.

<u>*Короткі теоретичні відомості*</u>: із курсу теорії ймовірностей відомо, що результати практичних вимірювань є *неперервними випадковими величинами X,* які мають рівномірний розподіл:

$$f(x) = \begin{cases} 0, & при\ x < a \\ \frac{1}{b-a}, & при\ \ a \le x \le b \\ 0, & при\ x > b \end{cases}$$

Якщо в свою чергу вони є аргументами деякої невипадкової функції, то говорять що задано *функцію одного випадкового аргументу* $Y = \varphi(X)$.

Математичне сподівання цієї функції в нашій задачі можна вважати наближеним значенням шуканої величини *V*, а її середнє квадратичне відхилення – межею абсолютної похибки h_V.

Математичне сподівання функції одного випадкового аргументу обчислюють за формулою: $M(Y) = \int_a^b y \cdot f(x)dx$.

Середнє квадратичне відхилення функції одного випадкового аргументу обчислюють за формулою: $\sigma(Y) = \sqrt{D(Y)}$, де $D(Y) = \int_a^b y^2 \cdot f(x)dx - M^2(Y)$.

Розв'язок задачі: За умовою задачі H - є результатом практичних вимірювань, яке з однаковою ймовірністю може дорівнювати будь-якому значенню із проміжку від *19,95 см* до *20,05 см*. Тому *Н* є рівномірно розподіленою неперервною випадковою величиною на проміжку [19,95; 20,05] і має таку щільність розподілу ймовірностей:

$$f(x)=\begin{cases}0, \; при \; x<19{,}95\\ \dfrac{1}{20{,}05-19{,}95}, \; при \; 19{,}95\le x\le 20{,}05\\ 0, \; при \; x>20{,}05\end{cases} \Rightarrow f(x)=\begin{cases}0, \; при \; x<19{,}95\\ \dfrac{1}{0{,}1}, \; при \quad 19{,}95\le x\le 20{,}05\\ 0, \; при \; x>20{,}05\end{cases}$$

Так як $V=\dfrac{17881}{8000000}H^3\pi$, то об'єм можна представити як функцію одного випадкового аргументу: $Y=\varphi(X)=\dfrac{17881\pi}{8000000}X^3$.

Обчислимо наближене значення об'єму, як математичне сподівання цієї функції:

$$M(Y)=\int_a^b y\cdot f(x)dx=\int_{19{,}95}^{20{,}05}\frac{17881\pi}{8000000}\cdot x^3\cdot\frac{1}{0{,}1}dx=\frac{17881\pi}{8000000\cdot 0{,}1}\int_{19{,}95}^{20{,}05}x^3dx=$$

$$=\frac{17881\pi}{800000}\cdot\frac{x^4}{4}\Bigg|_{19{,}95}^{20{,}05}=\frac{17881\pi}{800000}\cdot\left(\frac{(20{,}05)^4}{4}-\frac{(19{,}95)^4}{4}\right)=56.175169331453...$$

Виконувати відповідні обчислення за допомогою калькулятора недоцільно. Калькулятори, які використовують учні, як правило мають обмежену кількість комірок, що призводить або до їх відмови виконувати відповідні обчислення, або до виникнення додаткової, достатньо великої похибки поточних округлень, яку іноді називають похибкою обчислення. У даному випадку, а також для обчислення дисперсії функції, доцільно використовувати програмно-педагогічні засоби, наприклад GRAN.

Обчислимо межу абсолютної похибки, як середнє квадратичне відхилення функції $Y=\varphi(X)=\dfrac{17881\pi}{8000000}X^3$, попередньо обчисливши її дисперсію:

$$D(Y)=\int_a^b y^2\cdot f(x)dx-M^2(Y)=\int_{19,95}^{20,05}\left(\frac{17881\pi}{8000000}\cdot x^3\right)^2\cdot\frac{1}{0,1}dx-M^2(Y)=$$

$$\left(\frac{17881\pi}{8000000}\right)^2\cdot\frac{1}{0,1}\int_{19,95}^{20,05}x^6dx-M^2(Y)=\left(\frac{17881\pi}{8000000}\right)^2\cdot\frac{1}{0,1}\cdot\frac{x^7}{7}\Bigg|_{19,95}^{20,05}-M^2(Y)=$$

$$3155.70881...-(56.17516...)^2=0,0591679...$$

$$\sigma(Y)=\sqrt{0,0591679...}=0.24324...$$

$$V=(56.17516...\pm 0.24324...)см^3$$

$$V=(56,18\pm 0,25)см^3$$

Відповідь: $V=(56,18\pm 0,25)см^3$.

Зрозуміло, що теоретичні відомості, які використовувались у третьому варіанті розв'язку даної задачі, далеко виходять за межі навчальної програми, навіть класів із поглибленим вивченням математики. Однак, впровадження у шкільний курс математики стохастичної лінії, а також інформаційно-комунікаційних технологій на часі є актуальним і ще остаточно незавершеним. Фахівці постійно шукають шляхи удосконалення існуючого стану речей. Запропонована задача, а точніше її розв'язування за допомогою понятійного апарату теорії ймовірностей, наведена як поштовх для таких пошуків.

Окремої розмови потребує питання застосування похідної до наближених обчислень. Ознайомлення з відповідним теоретичним матеріалом передбачене програмою з математики для старшої школи майже для усіх профілів та напрямів [5]. Однак його обсяги недостатні для того, щоб розв'язати наведену задачу коректно з точки зору наближених обчислень. Мова йде про те, що керуючись загальновідомою формулою: $f(x_0+\Delta x)\approx f(x_0)+f'(x_0)\cdot\Delta x$, ми можемо знайти наближене значення *V*, але не зможемо його оцінити, тобто вказати точність, з якою виконані обчислення. Звичайно, задача про знаходження межі абсолютної похибки таких обчислень розв'язується у курсах вищої математики, але відповідні адаптовані відомості мають знайти своє відображення і у курсах математики старших класів природничого напряму.

Висновки. Головним завдання навчання математики учнів природничого напряму є досягнення ними практичної компетенції. Серед багатьох інших речей вона передбачає вміння учнями аналізувати та уточнювати вихідні данні задачі; обирати засоби розв'язування задачі, порівнювати їх і застосовувати оптимальні; оцінювати отримані результати; володіти технікою різних обчислень, зокрема і наближених. Таким чином впровадження змістової лінії наближених обчислень у різних проявах для різних профілів і напрямів старшої школи на часі є актуальним завданням, яке є складовою забезпечення якості математичної освіти.

ЛІТЕРАТУРА

1. Возняк Г.М. Алгебра: [підручник для 9 класу загальноосвітніх навчальних закладів] / Возняк Г.М., Литвиненко Г.М.- Тернопіль: Навчальна книга - Богдан, 2001.-200 с.
2. Кравчук В.Р. Алгебра: [пробний підручник для 9 класу] / Кравчук В.Р., Підручна М.В., Янченко Г.М.; за ред. Слєпкань З.І. - Тернопіль: Підручники і посібники, 2004. – 248 с.
3. Коваленко В.Г. Алгебра: [эксперим. навч. посібник для 8 кл. шк. з погл. вивченням математики і спеціаліз. шк. фізико-мат. Профілю] / Коваленко В.Г., Кривошеєв В.Я., Лемберський Л.Я. - К.: Радянська школа, 1990.- 304с.
4. Литовченко З.М. Наближені обчислення: [посібник для вчителя] / Литовченко З.М., Єлизаветіна Н.В. - К.: Рад. школа, 1988. – 125 с.
5. Математика. Програми для загальноосвітніх навчальних закладів: Навчальні програми для профільного навчання. Програми факультативів, спецкурсів, гуртків. - Київ: Навчальна книга, 2003.-302с.
6. Нестеренко Ф.П. Математика в шкільному курсі фізики: [посібник для вчителя] / Нестеренко Ф.П. - К.: Рад. школа, 1981. – 102 с.
7. Слєпкань З.І. До проблеми вивчення наближених обчислень / Слєпкань З.І. // Математика в школі.- 2006.- №10.- С.8-10.

Аннотация. Клиндухова В.Н. Приближенные вычисления в классах естественно-математического направления обучения.

Более полувека приближенные вычисления являются официально признанной составляющей школьного математического образования. Их изучение часто сопровождается некоторыми противоречиями и проблемными моментами. Освещению некоторых из них и посвящена данная статья.

Summary. Klindukhova V. Approximate calculations in the classes natural and mathematical direction of teaching.
More that half a century approximate calculations are the component part of school mathematical education. Teachings of them are often accompanied with some contradictions and problematic moments which are considered in the article.